Solution 3 :

1°/ $|Z| = |(1+i)\bar{z}| = |1+i| \cdot |\bar{z}| = \sqrt{2}|z| = \sqrt{2}\, r$ donc $|Z| = \sqrt{2}\, r$.

2°/ Soit α un argument de Z.

1è Méthode

$Z = |Z| e^{i\alpha} = r\sqrt{2}\, e^{i\alpha}$

Or $Z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} r e^{-i\theta} = |Z| e^{i(-\theta+\frac{\pi}{4})}$ car $(1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}})$

$\Rightarrow \alpha \equiv \frac{\pi}{4} - \theta \ (2\pi)$.

2è Méthode

$\arg Z \equiv \arg\left[(1+i)\bar{z}\right] (2\pi) \equiv \arg(1+i) + \arg(\bar{z}) \ (2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{4} - \theta \ (2\pi)$

3°/ Soit $E = \{M(z) \in \mathcal{P} / |Z| = 2\}$

$|Z| = 2 \Leftrightarrow r\sqrt{2} = 2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2}$

Donc $E = \{M(z) \in \mathcal{P} / |z| = \sqrt{2}\} = \{M \in \mathcal{P} / OM = \sqrt{2}\}$

Conclusion : E est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$

4°/ Soit $F = \{M(z) / N(z) \in \Delta : 2x + y + 4 = 0\}$

Traitons cette question analytiquement :

On pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

D'où $Z = (1+i)(x - iy) = x + y + i(x - y)$ ainsi $N(x+y, x-y)$

$N \in \Delta \Leftrightarrow 2(x+y) + x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x + y + 4 = 0$

Conclusion : L'ensemble F est la droite Δ' d'équation $3x + y + 4 = 0$.

5°/ Soit $H = \{M(z) / Z \in \mathbf{R}_+^*\}$

1è Methode

$Z \in \mathbf{R}_+^* \Leftrightarrow x + y + i(x - y) \in \mathbf{R}_+^* \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x > 0 \end{cases}$